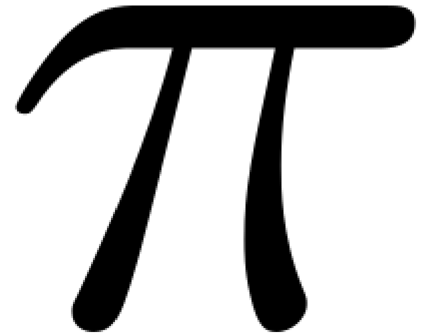
Pi

Untuk kegunaan lain, lihat Pi.


Simbol **Pi**, π.

Bilangan π (kadang-kadang ditulis **pi**) adalah sebuah konstanta dalam matematika yang merupakan perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya. Nilai **π** dalam 20 tempat desimal adalah 3,14159265358979323846. Banyak rumus dalam matematika, sains, dan teknik yang menggunakan π, yang menjadikannya salah satu dari konstanta matematika yang penting. π adalah bilangan irasional, yang berarti nilai π tidak dapat dinyatakan dalam pembagian bilangan bulat (biasanya pecahan 22/7 digunakan sebagai nilai pendekatan π; namun sebenarnya tiada satupun pecahan yang dapat mewakili nilai yang sama persis dengan π.) Oleh karena itu pula, representasi desimal π tidak akan pernah berakhir dan tidak akan pernah memiliki pola angka tertentu yang permanen. Digit-digit desimal π tampaknya terdistribusikan secara acak, walaupun sampai sekarang hal ini masih belum dibuktikan. π adalah bilangan transendental, yakni bilangan yang bukan akar dari polinom-polinom bukan nol manapun yang memiliki koefisien rasional. Transendensi π memiliki implikasi pada ketidakmungkinan teka-teki matematika kuno "mengkuadratkan lingkaran dengan hanya menggunakan jangka dan penggaris" untuk dapat dipecahkan.

Selama beribu-ribu tahun, matematikawan telah berusaha untuk memperluas pemahaman akan bilangan π. Hal ini kadang-kadang dilakukan dengan menghitung nilai bilangan π hingga keakurasian yang sangat tinggi. Sebelum abad ke-15, para matematikawan seperti Archimedes dan Liu Hui menggunakan teknik-teknik geometris yang didasarkan pada poligon untuk memperkirakan nilai π. Mulai abad ke-15, algoritme baru yang didasarkan pada deret tak terhingga merevolusi perhitungan nilai π. Cara ini digunakan oleh berbagai matematikawan seperti Madhava dari Sangamagrama, Isaac Newton, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, dan Srinivasa Ramanujan.

Pada abad ke-20 dan ke-21, para matematikawan dan ilmuan komputer menemukan pendekatan baru yang apabila digabungkan dengan daya komputasi komputer yang tinggi, mampu memperpanjang representasi desimal π sampai dengan lebih 10 triliun (10^{13}) digit.[1] Penerapan bilangan π dalam bidang sains pada umumnya tidak memerlukan lebih dari beberapa ratus digit desimal π dan bahkan kurang. Motivasi utama penghitungan ini adalah menemukan algoritme yang lebih efisien untuk menghitung rangkaian bilangan panjang sekaligus memecahkan rekor.[2][3] Perhitungan ekstensif seperti ini juga digunakan untuk menguji kemampuan superkomputer dan algoritme perkalian presisi tinggi. Pada tahun 1973, manusia berhasil menemukan 1 juta digit desimal dari π.

Karena definisi π berhubungan dengan lingkaran, maka pi banyak ditemukan dalam rumus-rumus trigonometri dan geometri, terutama yang menyangkut lingkaran, elips, dan bola. π juga ditemukan pada rumus-rumus bidang ilmu lainnya seperti kosmologi, teori bilangan, statistika, fraktal, termodinamika, mekanika, dan elektromagnetisme. Keberadaan π yang sangat umum menjadikannya sebagai salah satu konstanta matematika yang paling luas dikenal, baik di dalam maupun di luar kalangan ilmuwan. Hal ini dibuktikan dari beberapa penerbitan buku yang membahas bilangan ini, perayaan hari Pi, dan pemberitaan-pemberitaan yang luas dimana perhitungan digit π berhasil memecahkan rekor perhitungan. Beberapa orang bahkan dengan kerasnya berusaha menghafal nilai bilangan π dengan rekor 70.030 digit (Suresh Kumar Sharma, India).

Daftar isi

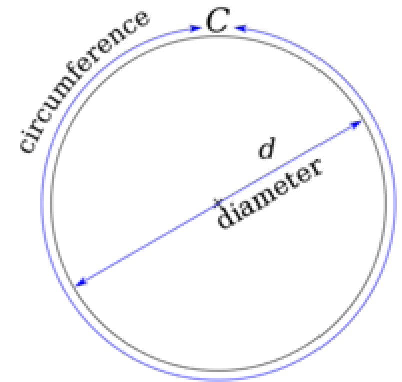
Tinjauan dasar

Nama

Simbol yang digunakan oleh para matematikawan untuk mewakilkan rasio keliling suatu lingkaran terhadap diameternya adalah huruf Yunani "π". Huruf tersebut dapat dituliskan sebagi *pi* menggunakan huruf latin.[4] Huruf kecil π (atau π dalam gaya huruf sans-serif) berbeda dengan huruf besar Π, yang mewakili perkalian barisan.

Pemilihan simbol π didiskusikan pada bagian Penggunaan simbol π

Definisi



Keliling sebuah lingkaran adalah sedikit lebih panjang dari tiga kali panjang diamternya. Perbandingan antara keliling lingkaran dengan diameternya disebut π.

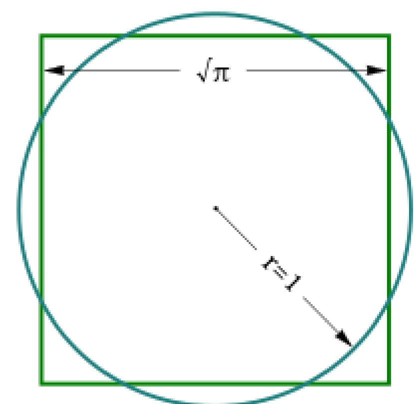
π umumnya didefinisikan sebagai rasio keliling lingkaran C dengan diameternya d:[5]

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Rasio C/d bernilai konstan tak tergantung pada ukuran lingkaran. Contohnya, jika suatu lingkaran memiliki diameter dua kali lipat daripada lingkaran lainnya, ia juga akan memiliki keliling yang dua kali lipat lebih besar, sehingganya nilai rasio C/d akan tetap sama. Definisi π seperti ini secara implisit menggunakan geometri Euklides. Walaupun gagasan akan lingkaran juga dapat diperluas ke dalam geometri non-Euklides, namun lingkaran yang baru ini tidak akan lagi memenuhi rumus $\pi = C/d$.[5] Terdapat pula definisi π lainnya yang tidak menyebut-nyebut lingkaran sama sekali, yakni: π adalah bilangan yang bernilai dua kali lipat dari bilangan positif terkecil x yang mana $\cos(x)$ sama dengan 0.[5][6]

Ciri-ciri

π adalah bilangan irasional, yang berarti bahwa ia tidak dapat ditulis sebagai rasio dua bilangan bulat.[7] Karena π irasional, maka ia memiliki digit bilangan desimal yang tak terhingga banyaknya. Terdapat beberapa bukti bahwa π irasional. Umumnya pembuktian ini memerlukan kalkulus dan bergantung pada teknik *reductio ad absurdum*. Sejauh mana bilangan π dapat didekati menggunakan bilangan rasional tidaklah diketahui.[8]



Karena π adalan bilangan transendental, Pemersegian lingkaran tidaklah dimungkinkan menggunakan jangka dan penggaris.

π adalah bilangan transendental, yang berarti bahwa ia bukanlah penyelesaian dari polinom non-konstan berkoefisien rasional manapun seperti $\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x = 0$.[9] Transendensi π mempunyai dua konsekuensi penting. Pertama, π tidak dapat diekspresikan menggunakan kombinasi bilangan rasional dan akar kuadrat ataupun akar pangkat ke-n manapun seperti $\sqrt[3]{31}$ atau $\sqrt[2]{10}$. Kedua, oleh karena tiada bilangan transendental apapun yang dapat dikonstruksikan menggunakan jangka dan penggaris, tidaklah dimungkinkan untuk "mempersegikan lingkaran". Dengan kata lain, tidaklah mungkin untuk mengkonstruksi persegi yang luasnya sama dengan luas lingkaran tertentu hanya dengan menggunakan jangka dan penggaris.[10] Pemersegian lingkaran merupakan salah satu teka-teki geometri yang penting pada zaman era klasik.[11] Matematikawan amatiran pada zaman modern kadang-kadang masih berusaha mempersegikan lingkaran dan mengklaim berhasil menyelesaikannya, walaupun telah diketahui hal ini tidak mungkin dilakukan.[12][13]

Digit-digit π tidak memiliki pola apapun dan telah melewati uji keacakan statistis meliputi uji normalitas; sebuah bilangan dengan panjang tak terhingga dikatakan normal apabila keseluruhan barisan digitnya muncul sama banyaknya.[14] Hipotesis bahwa π adalah normal belum berhasil dibuktikan maupun dibantah.[14] Sejak ditemukannya komputer, sejumlah besar digit π telah berhasil dikomputasi untuk dianalisis secara statistik. Yasumasa Kanada telah menganalisis secara detail digit-digit desimal π dan menemukannya konsisten dengan normalitas. Tiada bukti sepuluh digit 0 sampai dengan 9 yang ditemukan memiliki pola-pola apapun.[15] Walaupun digit-digit π telah melewati uji keacakan statistik, π mengandung beberapa barisan digit yang tampaknya tidak acak, misalnya titik Feynman, yang merupakan barisan enam angka 9 secara beruruan yang dimulai dari desimal ke-762 π.[16]

Pecahan kontinu

Sama seperti semua bilangan irasional lainnya, π tidak dapat diwakilkan sebagai pecahan sederhana. Namun setiap bilangan irasional, termasuk π dapat diwakilkan menggunakan deret pecahan bersarang tak terhingga yang disebut sebagai pecahan kontinu:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$



Konstanta π yang disajikan dalam bentuk mosaik di luar Gedung Matematika di Universitas Teknik Berlin.

Penghentian pecahan kontinu pada titik pembagian manapun akan memberikan nilai pendekatan π; dua pecahan 22/7 dan 355/113 secara historis digunakan sebagai pendekatan terhadap π. Walauapun pecahan kontinu yang sederhana (seperti pada contoh di atas) untuk π tidak memiliki pola-pola tertentu,[17] matematikawan telah menemukan beberapa pecahan kontinu generalisasi yang memiliki pola tertentu, misalnya:[18]

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \ddots}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \ddots}}}}}$$

Nilai pendekatan/taksiran

Beberapa pendekatan *pi* meliputi:

- **Bilangan bulat**: 3
- **Pecahan**: Pendekatan pecahan meliputi: (diurutkan berdasarkan kenaikan akurasi) $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{52163}{16604}$, $\frac{103993}{33102}$, dan $\frac{245850922}{78256779}$.[19] (Disarikan dari A063674 and A063673.)
- **Desimal**: Limapuluh desimal pertama adalah 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510...[20] A000796

- **Biner**: Pendekatan basis 2 hingga 48 digit adalah 11,0010 0100 0011 1111 0110 1010 1000 1000 1000 0101 1010 0011...
- **Heksadesimal**: Pendekatan basis 16 hingga 20 digit adalah 3,243F 6A88 85A3 08D3 1319...[21]
- **Seksagesimal**: Pendekatan basis 60 hingga lima digit seksagesimal adalah 3;8,29,44,0,47[22][n 1]

Sejarah

Artikel utama: Pendekatan nilai π
Lihat pula: Kronologi komputasi π

Zaman kuno

Piramida Giza Mesir yang dibangun pada tahun 2589–2566 SM, dibangun dengan kelilingnya sekitar 1760 kubit dan tinggi sekitar 280 kubit. Perbandingan antara keliling dengan tinggi piramida ini adalah $^{1760}/_{280} \approx 6{,}2857$. Nilai ini mendekati $2\pi \approx 6{,}2832$. Berdasarkan rasio ini, beberapa ahli Mesir kuno menyimpulkan bahwa pendiri bangunan piramida ini memiliki pengetahuan akan π dan dengan sengaja mendesain piramida dengan rasio seperti ini.[n 2][23][24][25][26] Beberapa ahli menyanggah hal tersebut dan menyimpulkan hal ini hanyalah kebetulan belaka karena tiada butki lain apapun yang mendukungnya.[27][28][29][n 3]

Pendekatan tertulis terhadap nilai π paling awal ditemukan di Mesir dan Babilonia, dengan nilai pendekatan berselisih lebih kurang 1 persen dari nilai sebenarnya. Sebuah lempeng liat dari Babilonia tahun 1900-1600 SM memuat penyataan mengenai geometri yang mengasumsikan π sebagai 25/8 = 3,1250.[30] Di Mesir, Papirus Rhind yang berasal dari tahun 1650 SM (papirus ini sendiri merupakan salinan dari dokumen tahun 1850 SM) memiliki rumus luas lingkaran yang mengasumsikan nilai π sebagai $(^{16}/_{9})^2 \approx 3{,}1605$.[30]

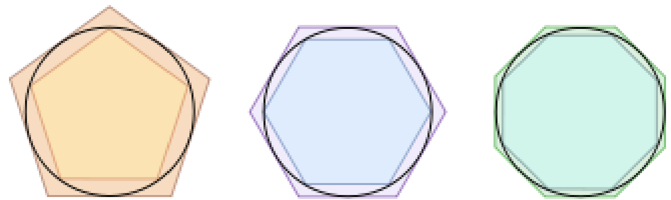
Di India sekitar tahun 600 SM, catatan Sutra Shulba dalam bahasa Sanskerta memuat nilai π sebesar $(^{9785}/_{5568})^2 \approx 3{,}088$.[31] Pada tahun 150 SM, sumber-sumber catatan dari India memperlakukan π sama dengan $\sqrt{10} \approx 3{,}1622$.[32]

Dua ayat dalam alkitab Ibrani (yang ditulis antara abad ke-8 dan ke-3 SM) medeskripsikan sebuah kolam seremonial dalam Bait Salomo yang berdiameter 10 kubit dan kelilingnya 30 kubit; ayat ini menyiratkan bahwa π adalah sekitar tiga apabila kolam tersebut berbentuk lingkaran.[n 4][33][34][n 5] Rabbi Nehemiah menjelaskan bahwa diskrepansi ini diakibatkan oleh ketebalan pinggiran kolam. Hasil kerja paling awal Rabbi Nehemiah *Mishnat ha-Middot* yang ditulis sekitar tahun 150 mengambil nilai π sebesar tiga dan sepertujuh.[35]

Zaman pendekatan poligon

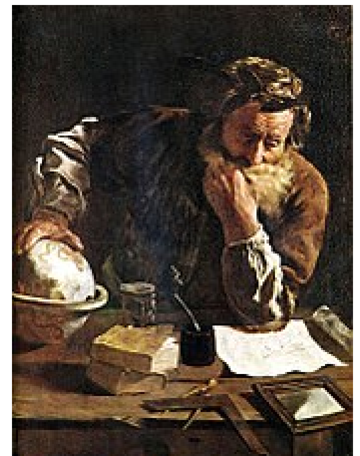
Algoritme paling awal yang tercatat secara cermat menghitung nilai π adalah pendekatan geometri menggunakan poligon. Algoritme ini ditemukan sekitar 250 SM oleh matematikawan Yunani Archimedes.[36] Algoritme poligon ini mendominasi selama 1.000 tahun, dan karenanya π kadang-kadang dirujuk juga sebagai "konstanta Archimedes".[37] Archimedes menghitung batas atas dan bawah π dengan menggambar poligon di luar dan di dalam sebuah lingkaran, dan secara perlahan melipatgandakan sisi-sisi poligon tersebut hingga mencapai 96-gon. Dengan menghitung keliling poligon-poligon tersebut, Archimedes membuktikan bahwa $^{223}/_{71} < \pi < ^{22}/_{7}$ (3,1408 < π < 3,1429).[38] Batas atas Archimedes sekitar $^{22}/_{7}$ membuat banyak orang percaya bahwa π sama dengan $^{22}/_{7}$.[39] Sekitar tahun 150, Ptolemaeus dalam

Almagest-nya, memberikan nilai π sebesar 3,1416. Hasil ini kemungkinan dia dapatkan dari Archimedes ataupun dari Apollonius dari Perga.[40][41] Para matematikawan kemudian menggunakan algoritme ini dan mencapai rekor 39 digit π pada tahun 1630 sebelum dipecahkan pada tahun 1699 menggunakan deret tak terhingga.[42][n 6]



π dapat diperkirakan dengan menghitung keliling poligon luar dan dalam lingkaran.

Pada zaman Cina kuno, nilai π adalah 3,1547 (sekitar tahun 1 Masehi), $\sqrt{10}$ (tahun 100, sekitar 3,1623), dan 142/45 (abad ke-3, sekitar 3,1556).[43] Sekitar tahun 265, matematikawan dari Kerajaan Wei, Liu Hui, menemukan algoritme iteratif berbasis poligon yang digunakan dengan 3072-gon untuk menghasilkan nilai π sebesar 3,1416.[44][45] Liu kemudian menciptakan metode yang lebih cepat dan mendapatkan nilai 3,14 dengan menggunakan 96-gon.[44] Matematikawan Cina Zu Chongzhi sekitar tahun 480 menghitung bahwa $\pi \approx {}^{355}\!/\!_{113}$ (pecahan ini dinamakan pecahan Milü dalam bahasa Cina) dengan menggunakan algoritme Liu Hui dan menerapkannya menggunakan 12.288-gon. Nilai yang didapatkannya adalah 3,141592920... dan akurat sebanyak tujuh digit. Nilai pendekatan ini merupakan nilai yang paling akurat selama 800 tahun ke depan.[46]



Archimedes mengembangkan algoritme poligon untuk menghitung nilai pendekatan π.

Astronom India Aryabhata menggunakan nilai 3,1416 dalam Āryabhaṭīya (tahun 499).[47] Fibonacci pada tahun 1220 menghitung nilai π dan mendapatkan hasil 3,1418 menggunakan metode poligon.[48]

Astronom Persia Jamshīd al-Kāshī menghasilkan 16 digit nilai π pada tahun 1424 menggunakan poligon bersisi 3×2^{28},[49][50]. Ini kemudian menciptakan rekor untuk 180 tahun.[51] Matematikawan Prancis François Viète pada tahun 1579 mencapai 9 digit menggunakan poligon bersisi 3×2^{17}.[51] Matematikawan Flandria mencapai 15 digit desimal pada tahun 1593.[51] Pada tahun 1596, matematikawan Belanda Ludolph van Ceulen mencapai 20 digit, dan rekor ini dipecahkan oleh dirinya sendiri mencapai 35 digit.[52] Ilmuwan Belanda Willebrord Snellius mencapai 34 digit pada tahun 1621,[53] dan astronom Austria Christoph Grienberger mencapai 38 digit pada tahun 1630,[54][n 7] adalah nilai terakurat yang didapatkan secara perhitungan manual menggunakan pendekatan poligon.[53]

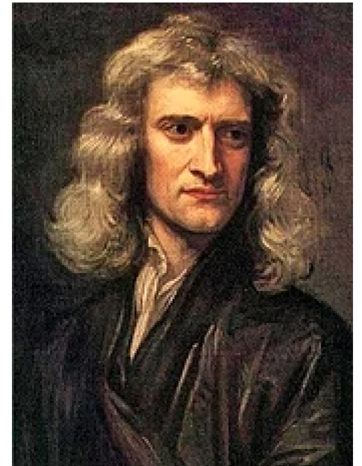
Deret tak hingga

Perhitungan π direvolusi oleh berkembangnya teknik deret tak hingga pada abad ke-16 dan 17. Deret tak hingga merupakan penjumlahan deretan suku-suku yang tak terhingga banyaknya.[55] Hal ini memungkinkan matematikawan menghitung nilai π dengan presisi yang melebihi metode Archimedes.[55] Walaupun metode deret tak hingga utamanya digunakan oleh matematikawan Eropa untuk menghitung nilai π, pendekatan ini pertama kali ditemukan di India antara tahun 1400 dan 1500.[56][57] Deskripsi tertulis pertama mengenai deret tak hingga yang dapat digunakan untuk menghitung π terdapat dalam ayat Sanskerta yang ditulis oleh astronom India Nilakantha Somayaji dalam buku *Tantrasamgraha* sekitar tahun 1500.[56] Deret ini diberikan tanpa pembuktian, walaupun pembuktian ini kemudian diberikan kemudian dalam Yuktibhāṣā sekitar tahun 1530. Nilakantha memberi kredit penemuan deret ini kepada matematikawan India Madhava dari Sangamagrama yang hidup antara tahun 1350 – c. 1425.[56] Beberapa deret tak terhingga dijelaskan, meliputi deret untuk sinus, tangen, dan kosinus, yang dikenal sebagai deret

Madhava atau deret Gregory-Leibniz.[56] Madhava menggunakan deret tak hingga untuk memperkirakan nilai π sampai dengan 11 digit sekitar tahun 1400. Namun rekor tersebut dikalahkan oleh matematikawan Persia Jamshīd al-Kāshī pada tahun 1430 menggunakan algoritme poligon.[58]

Deret tak hingga yang ditemukan di Eropa pertama kali adalah perkalian tak hingga (daripada penjumlahan tak hingga), yang ditemukan oleh matematikawan Prancis François Viète pada tahun 1593:[60]

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$


Isaac Newton menggunakan deret tak hingga untuk menghitung nilai π sampai 15 digit.[59]

Deret tak hingga kedua yang ditemukan di Eropa oleh John Wallis pada tahun 1655 juga merupakan perkalian tak hingga.[60] Penemuan kalkulus oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz pada tahun 1660-an mendorong perkembangan banyak deret tak hingga untuk menghitung nilai π. Newton sendiri menggunakan deret arka sinus untuk menghitung π sampai dengan 15 digit pada tahun 1665 atau 1666.[59]

Di Eropa, rumus Madhava ditemukan ulang oleh matematikawan Skotlandia James Gregory pada tahun 1671, dan oleh Leibniz pada tahun 1674:[61][62]

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

Rumus ini, yang disebut deret Gregory-Leibniz, sama dengan $\pi/4$ ketika dievaluasi bersama dengan $z = 1$.[62] Pada tahun 1699, matematikawan Inggris Abraham Sharp menggunakan deret ini untuk menghitung π sampai dengan 71 digit, dan memecahkan rekor 39 digit sebelumnya.[63] Deret Gregory-Leibniz cukup sederhana, namun berkonvergen sangat lambat, sehingga ia tidak digunakan pada zaman modern untuk menghitung π.[64]

Pada tahun 1706, John Machin menggunakan deret Gregory-Leibniz untuk menghasilkan algoritme yang berkonvergen lebih cepat:[65]

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Machin mencapai 100 digit π dengan rumus ini.[66] Beberapa matematikawan kemudian menciptakan beberapa varian yang digunakan untuk memecahkan rekor digit π secara suksesif.[66] Rumus bak-Machin ini merupakan metode perhitungan digit π yang terbaik sebelum ditemukannya komputer. Rekor penemuan digit π terus dipecahkan menggunakan rumus ini selama 250, sampai dengan 620 digit oleh Daniel Ferguson pada tahun 1946. Nilai pendekatan ini dihasilkan tanpa menggunakan alat hitung apapun.[67]

Matematikawan Britania William Shanks terkenal akan usahanya selama 15 tahun untuk menghitung nilai π sampai dengan 707 digit. Namun ia membuat kesalahan pada digit ke-528, membuat digit-digit selanjutnya salah.[68]

Laju konvergensi

Beberapa deret tak hingga untuk π berkonvergen lebih cepat daripada yang lainnya. Matematikawan biasanya akan menggunakan deret yang lebih cepat berkonvergen untuk menghemat waktu sampai dengan tingkat akurasi tertentu.[69] Deret tak terhingga untuk π yang sederhana misalnya deret Gregory-Leibniz:[70]

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \cdots$$

akan perlahan-lahan mendekati π. Nilainya berkonvergen sangat lambat. Sampai dengan suku ke 500.000, deret ini hanya menghasilkan lima digit desimal yang benar untuk π.[71]

Deret yang lebih cepat berkonvergen adalah (digunakan oleh Nilakantha pada abad ke-15):[72][n 8][73]

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} - \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7 \times 8} - \frac{4}{8 \times 9 \times 10} + \cdots$$

Perbandingan konvergensi kedua deret di atas adalah sebagai berikut:

Deret tak hingga untuk π	Setelah suku ke-1	Setelah suku ke-2	Setelah suku ke-3	Setelah suku ke-4	Setelah suku ke-5	Berkonvergen ke:
$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} \cdots$	4,0000	2,6666...	3,4666...	2,8952...	3,3396...	π = 3,1415...
$\pi = 3 + \frac{4}{2\times3\times4} - \frac{4}{4\times5\times6} + \frac{4}{6\times7\times8} \cdots$	3,0000	3,1666...	3,1333...	3,1452...	3,1396...	

Setelah lima suku, jumlah deret Gregory-Leibniz akurat dengan selisih 0,2 dari nilai π sebenarnya, manakala pada deret Nilakantha, selisihnya 0,0002. Deret Nilakantha berkonvergen lebih cepat dan lebih berguna dalam perhitungan π. Deret lainnya yang berkonvergen lebih cepat meliputi deret Machin dan deret Chudnovsky. Deret Chudnovsky mampu menghasilkan 14 digit desimal yang benar setiap suku.[69]

Irasionalitas dan transendensi

Tidak semua penelitian matematika yang berhubungan dengan π ditujukan pada peningkatan akurasi nilai pendekatan π. Ketika Euler menyelesaikan masalah Basel pada tahun 1735, ia berhasil menurunkan hubungan antra π dengan bilangan prima yang kemudian berkontribusi pada berkembangnya kajian mengenai fungsi zeta Riemann:[74]

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Ilmuwan Swiss Johann Heinrich Lambert pada tahun 1761 membuktikan bahwa π adalah irasional, yang berarti ia bukanlah hasil dari pembagian dua bilangan bulat manapun.[7] Pembuktian Lambert menggunakan representasi pecahan kontinu dari fungsi tangen.[75] Matematikawan Prancis Adrien-Marie Legendre pada tahun 1794 membuktikan bahwa π^2 jugalah irasional. Pada tahun 1882, matematikawan Jerman Ferdinand von Lindemann membuktikan bahwa π adalah transendental, yang kemudian berhasil mengonfirmasi konjektur yang dibuat oleh Legendre dan Euler.[76]

Penggunaan simbol π

Huruf Yunani π paling awal diketahui digunakan untuk mewakili rasio keliling lingkaran dengan diameternya oleh matematikawan William Jones dalam karya tahun 1706 *"Synopsis Palmariorum Matheseos; or, a New Introduction to the Mathematics"*.[77] Huruf Yunani ini pertama kali muncul dalam

frasa "1/2 Periphery π" (1/2 keliling π) dalam mendiskusikan suatu lingkaran berjari-jari satu. Jones mungkin memilih simbol π karena π adalah huruf pertama dari kata "keliling" dalam bahasa Yunani.[n 9] Namun ia menulis bahwa persamaan untuk π tersebut berasal dari John Machin.[78] Simbol ini sebenarnya pernah digunakan lebih awal sebagai konsep geometri.[78] William Oughtred menggunakan π dan δ, huruf Yunani yang setara dengan p dan d, untuk mengekspresikan rasio keliling dengan diameter pada tahun 1647.


Leonhard Euler mempopulerkan penggunaan huruf Yunani π dalam karyanya yang dipublikasikan pada tahun 1736 dan 1748.

Setelah Jones memperkenalkan penggunaan huruf Yunani π ini pada tahun 1706, simbol ini tidak digunakan secara luas oleh matematikawan lain sampai dengan Euler yang mulai menggunakannya pada karya tahun 1736-nya, Mechanica. Sebelumnya, matematikawan kadang-kadang menggunakan simbol *c* atau *p*.[78] Karena Euler memiliki banyak koneksi dengan matematikawan-matematikawan lainnya di Eropa, penggunaan huruf π meluas dengan cepat.[78] Pada tahun 1748, Euler menggunakan simbol π dalam karyanya *Introductio in analysin infinitorum* (dia menulis: "untuk mempersingkat penulisan, kita akan menulis bilangan ini sebagai π; sehingga π sama dengan setengah keliling lingkaran berjari-jari 1"). Hal ini kemudian memicu penggunaan π yang universal di Barat.[78]

Pencarian digit yang lebih banyak pada zaman modern

Zaman komputer dan algoritme iteratif


John von Neumann merupakan salah satu anggota tim ENIAC yang menggunakan komputer digital untuk mengkomputasi π.

Perkembangan komputer yang pesat pada pertengahan abad ke-20 merevolusi perhitungan digit desimal π. Matematikawan Amerika John Wrench dan Levi Smith berhasil menghitung nilai pi sampai dengan 1.120 digit menggunakan kalkulator meja.[79] Dengan menggunakan deret tak terhingga invers tangen (arctan), sekelompok tim yang dipimpin oleh George Reitwiesner dan John von Neumann pada tahun yang sama berhasil mencapai 2.037 digit menggunakan komputer ENIAC dengan lama perhitungan selama 70 jam.[80] Rekor ini terus dipecahkan menggunakan deret arctan (7.480 digit pada tahun 1957; 10.000 digit pada tahun 1958; 100.000 digit pada tahun 1961), sampai dengan 1 juta digit pada tahun 1973.[81]

Perkembangan lebih jauh sekitar tahun 1980 kemudian mempercepat kemampuan komputasi π. Pertama, penemuan algoritme iteratif baru yang lebih cepat daripada deret tak terhingga; dan kedua, penemuan algoritme perkalian cepat yang mampu mengalikan bilangan besar dengan sangat cepat.[82] Algoritme ini sangat penting karena waktu yang dihabiskan oleh komputasi komputer kebanyakan berkutat pada perkalian.[83] Algoritme seperti ini contohnya algoritme Karatsuba, perkalian Toom-Cook, dan metode berbasis transformasi Fourier.[84]

Algoritme iteratif Gauss–Legendre:
Inisialisasi

$$a_0=1 \quad b_0=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad t_0=\frac{1}{4} \quad p_0=1$$

Algoritme iteratif secara independen dipublikasikan pada tahun 1975-1976 oleh fisikawan Amerika Eugene Salamin dan ilmuwan Australia Richard Brent.[85]

Algoritme ini membuat komputasi digit pi bebas dari deret tak terhingga. Algoritme iteratif mengulangi perhitungan tertentu dengan tiap iterasi menggunakan hasil iterasi sebelumnya sebagai input dan setahap demi setahap menghasilkan nilai perhitungan yang berkonvergen ke nilai yang kita inginkan.

Iterasi

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \qquad b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$$
$$t_{n+1}=t_n-p_n(a_n-a_{n+1})^2 \qquad p_{n+1}=2p_n$$

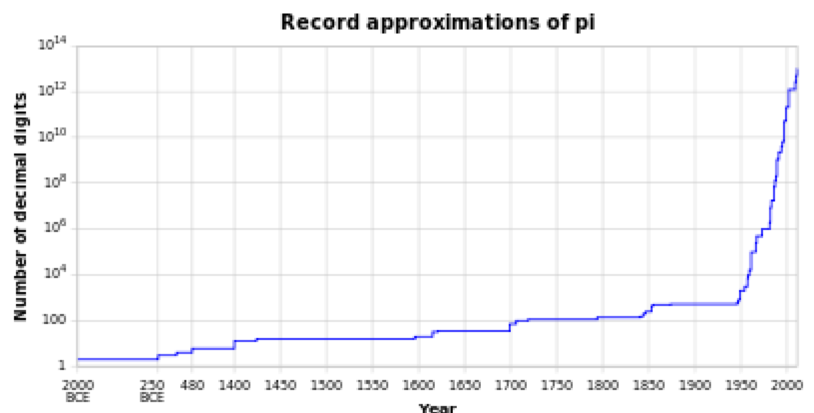
Maka perkiraan untuk nilai π dihasilkan oleh

$$\pi\approx\frac{(a_n+b_n)^2}{4t_n}$$

Algoritme iteratif digunakan secara meluas setelah tahun 1980 karena algoritme ini lebih cepat daripada algoritme deret tak terhingga. Manakala algoritme deret tak terhingga meningkatkan jumlah digit yang benar setiap suku, algoritme iteratif pada umumnya melipatgandakan jumlah digit yang benar pada setiap iterasi. Sebagai contohnya, algoritme Brent-Salamin menggandakan jumlah digit yang benar pada tiap iterasi. Pada tahun 1984, John dan Peter Borwein berhasil menemukan algoritme iteratif yang menggandaempatkan jumlah digit pada tiap iterasi; dan pada tahun 1987 berhasil menggandalimakan jumlah digit pada tiap iterasi.[86][n 10] Metode iteratif digunakan oleh matematikawan Yasumasa Kanada untuk memecahkan beberapa rekor komputasi π antara tahun 1995 sampai dengan tahun 2002.[87] Konvergensi yang sangat cepat ini memiliki kelemahannya sendiri, yakni memerlukan memori komputer yang jauh lebih besar daripada yang diperlukan oleh deret tak terhingga.[87]

Motivasi komputasi π

Dalam perhitungan numeris yang melibatkan π, biasanya kita hanya memerlukan beberapa digit desimal π untuk mencapai tingkat presisi yang cukup tinggi. Menurut Jörg Arndt dan Christoph Haenel, 39 digit π sudah mencukupi untuk menghitung kebanyakan perhitungan kosmologi, karena ini merupakan jumlah digit yang diperlukan untuk menghitung volume alam semesta sampai dengan satu atom.[88] Walau demikian, banyak orang telah bekerja keras untuk mengkomputasi π sampai dengan ribuan dan jutaan digit.[89] Usaha ini sebagian dikarenakan dorongan manusia untuk memecahkan rekor, dan biasanya pencapaian seperti ini sering masuk ke dalam tajuk berita seluruh dunia.[90][91] Perhitungan seperti ini juga memiliki kegunaan praktisnya, yaitu untuk menguji superkomputer, menguji algoritme analisis numeris; dan dalam lingkup matematika murni sendiri, data yang dihasilkan dapat digunakan untuk mengevaluasi keacakan digit-digit π.[92]



Seiring dengan ditemukannya algoritme-algoritme baru dan daya perhitungan komputer yang semakin cepat, jumlah digit desimal bilangan π yang ditemukan meningkat secara dramatis.

Deret konvergen cepat

Kalkulator π modern tidak menggunakan algoritme iteratif secara eksklusif. Deret tak terhingga baru yang ditemukan pada tahun 1980-an dan 1990-an mampu berkonvergen secepat algoritme iteratif, namun lebih sederhana dan memerlukan memori yang lebih sedikit.[87] Penemuan algoritme iteratif cepat terdahului oleh penemuan deret konvergen cepat pada tahun 1914, ketika matematikawan India Srinivasa Ramanujan mempublikasikan lusinan rumus-rumus baru untuk π yang berkonvergen sangat cepat.[93] Salah satu rumusnya yang didasarkan pada persamaan modular adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{k!^4 (396^{4k})}$$



Srinivasa Ramanujan yang meneliti sendirian di India, berhasil menemukan banyak deret-deret yang inovatif untuk menghitung π.

Deret ini berkonvergen lebih cepat daripada kebanyakan deret-deret arctan, meliputi rumus Machin.[94] Bill Gosper adalah orang yang pertama kali menggunakan rumus ini untuk menghitung π dan memecahkan rekor 17 juta digit pada tahun 1985.[95] Penemuan rumus-rumus Ramanjuan mendahului penemuan algoritme-algoritme modern yang dikembangkan Borwein bersaudara dan Chudnovsky bersaudara.[96] Rumus Chudnovsky yang dikembangkan pada tahun 1987 adalah sebagai berikut

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Rumus ini menghasilkan 14 digit π setiap sukunya,[97] dan telah digunakan dalam berbagai perhitungan π yang memecahkan rekor, meliputi yang pertama kali memecahkan 10^9 digit pada tahun 1989 oleh Chudnovsky bersaudara, 2,7 triliun (2.7×10^{12}) digit oleh Fabrice Bellard pada tahun 2009, dan 10 triliun (10^{13}) digit pada tahun 2011 oleh Alexander Yee dan Shigeru Kondo.[1][98][99]

Pada tahun 2006, matematikawan Kanada Simon Plouffe menggunakan algoritme relasi integer PSLQ[n 11] untuk menghasilkan beberapa rumus baru untuk π, yang memiliki bentuk acuan sebagai berikut:

$$\pi^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \left(\frac{a}{q^n - 1} + \frac{b}{q^{2n} - 1} + \frac{c}{q^{4n} - 1} \right)$$

dengan q adalah e^{π} (konstanta Gelfond), k adalah bilangan ganjil, dan a, b, c adalah bilangan rasional tertentu yang dikomputasi Plouffe.[100]

Algoritme keran

Dua algoritme baru yang ditemukan pada tahun 1995 membuka jalan baru bagi riset π. Algoritme ini dinamakan algoritme keran, karena seperti air yang menetes dari sebuah keran, algoritme ini menghasikan satu digit tunggal π yang tidak akan digunakan kembali setelah dihitung.[101][102] Algoritme ini berbeda dari algoritme-algoritme deret tak terhingga dan iteratif yang menyisakan dan menggunakan semua digit-digit intermediat sampai penyelesaian akhirnya dihasilkan.[101]

Matematikawan Amerika Stan Wagon dan Stanley Rabinowitz menemukan algoritme keran sederhana pada tahun 1995.[102][103][104][n 12] Kecepatan konvergensi algoritme ini sebanding dengan algoritme arctan, namun tidak secepat algoritme iteratif.[103]

Algoritme keran lainnya, algoritme ekstraksi digit BBP ditemukan pada tahun 1995 oleh Simon Plouffe:[105][106]

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Rumus ini, tidak seperti rumus lainnya, dapat menghasilkan digit π heksadesimal individu tanpa menghitung digit-digit sebelumnya.[105] Digit-digit individu oktal maupun biner dapat diektraksi dari digit-digit heksadesimal. Variasi algoritme ini telah ditemukan, namun tiada satupun algoritme ekstraksi digit yang dapat menghasilkan digit desimal dengan cepat.[107][n 13] Aplikasi penting dari algoritme ekstraksi digit ini adalah untuk memvalidasi klaim rekor komputasi π yang baru; Setelah suatu rekor baru diklaim, hasil bilangan desimal ini kemudian diubah menjadi bilangan heksadesimal, dan kemudian algoritme ekstraksi digit digunakan untuk menghitung beberapa digit heksadesimal tersebut secara acak dekat bagian akhir digit π yang terhitung; apabila hasilnya cocok, maka dapat digunakan sebagai tolok ukur keyakinan bahwa perhitungan yang dilakukan telah benar[1]

Antara tahun 1998 dan 2000, proyek komputasi terdistribusi PiHex menggunakan rumus Bellard (modifikasi algoritme BBP) untuk mengkomputasi bit ke-kuadriliun (ke-10^{15}) π, yang hasilnya adalah 0.[108][109] Pada bulan September 2010, seorang karyawan Yahoo! menggunakan aplikasi Hadoop perusahaan dalam seribu komputer selama 23 hari untuk menghitung 256 bit π pada bit ke-dua kuadriliun (ke-2×10^{15}), yang hasilnya juga nol.[110]

Kegunaan

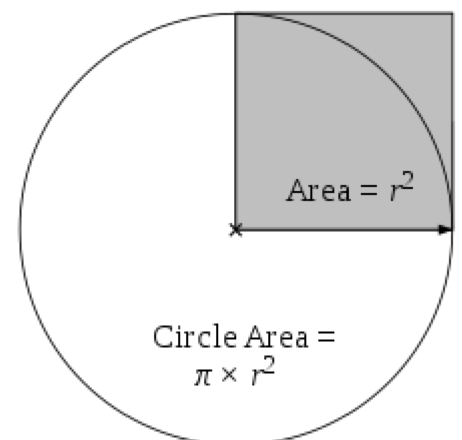
Artikel utama: Daftar rumus yang melibatkan π

Karena π berhubungan dekat dengan lingkaran, ia banyak ditemukan dalam rumus-rumus geometri dan trigonometri, utamanya yang menyangkut lingkaran, bola, dan elips. π juga ditemukan dalam berbagai cabang ilmu lainnya meliputi statistika, fraktal, termodinamika, mekanika, kosmologi, teori bilangan, dan elektromagnetisme.

Geometri dan trigonometri

π muncul dalam rumus-rumus perhitungan luas dan volume yang berkaitan dengan lingkaran, misalnya elips, bola, kerucut, dan torus. Beberapa rumus-rumus umum yang melibatkan π misalnya:[111]

- Keliling lingkaran dengan jari-jari *r* adalah $2\pi r$
- Luas lingkaran dengan jari-jari *r* adalah πr^2
- Volume bola dengan jari-jari *r* adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$
- Luas permukaan bola dengan jari-jari *r* adalah $4\pi r^2$



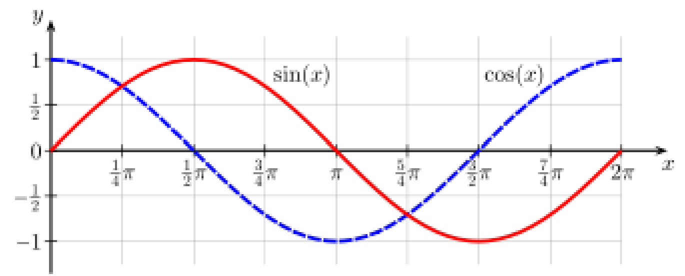
Luas lingkaran di atas adalah sama dengan π kali luas daerah yang diarsir.

π muncul dalam integral tertentu yang mendeskripsikan keliling, luas, dan volume bentuk yang dihasilkan oleh lingkaran. Sebagai contohnya, integral yang mendeskripsikan luas setengah lingkaran dengan jar-jari satu adalah:[112]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Dalam integral tersebut, fungsi $\sqrt{1-x^2}$ mewakili kurva setengah lingkaran, dan integralnya $\int_{-1}^{1}$ menghitung luas antara setengah lingkaran dengan sumbu *x*.

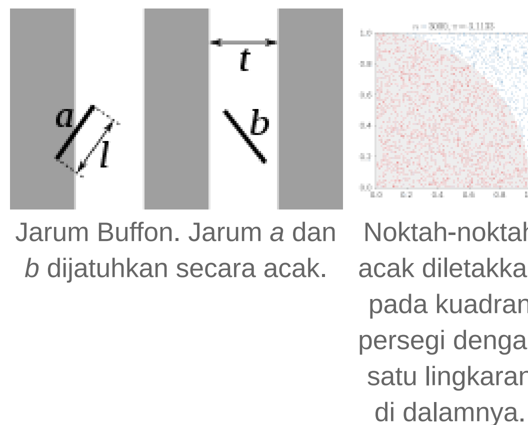
Fungsi trigonometri bergantung pada sudut, dan para matematikawan umumnya menggunakan radian sebagai satuan pengukuran sudut tersebut. π memainkan peran penting dalam sudut yang diukur dalam radian, yang didefinsikan sedemikian rupanya satu lingkaran penuh memiliki sudut 2π radian.[113] Hal ini berarti 180° sama dengan π radian, dan 1° = π/180 radian.[113]



Fungsi sinus dan kosinus berulang dengan periode 2π.

Fungsi-fungsi trigonometri pada umumnya memiliki periode yang merupakan kelipatan dari π, sebagai contohnya sinus dan kosinus memiliki periode 2π,[114] sehingga untuk sudut θ apapun dan bilangan bulat k apapun, $\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi k)$ and $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k)$.[114]

Metode Monte Carlo



Jarum Buffon. Jarum *a* dan *b* dijatuhkan secara acak.

Noktah-noktah acak diletakkan pada kuadran persegi dengan satu lingkaran di dalamnya.

Metode Monte Carlo, berdasarkan percobaan acak, dapat digunakan untuk mengaproksimasi π.

Metode Monte Carlo, yang mengevaluasi hasil dari banyak percobaan acak, dapat digunakan untuk membuat aproksimasi π.[115] Jarum Buffon adalah salah satu tekniknya: Jika sebuah jarum dengan panjang ℓ dijatuhkan n kali di atas permukaan yang di atasnya digambar garis paralel yang dipisahkan sebesar t satuan, dan jika dari x kali ia jatuh melintasi garis ($x > 0$), maka aproksimasi π dapat ditentukan berdasarkan perhitungan:[116]

$$\pi \approx \frac{2n\ell}{xt}$$

Metode Monte Carlo lainnya untuk menghitung π adalah dengan menggambar sebuah lingkaran dalam sebuah persegi, dan meletakkan noktah-noktah secara acak di dalam perseegi. Perbandingan noktah di dalam lingkaran terhadap jumlah noktah total akan kira-kira sama dengan π/4.[117][118]

Metode Monte Carlo untuk memperkirakan π sangat lambat dibandingkan metode lainnya, dan tidak pernah digunakan untuk memperkirakan π ketika diperlukan kecepatan atau akurasi.[119][120]

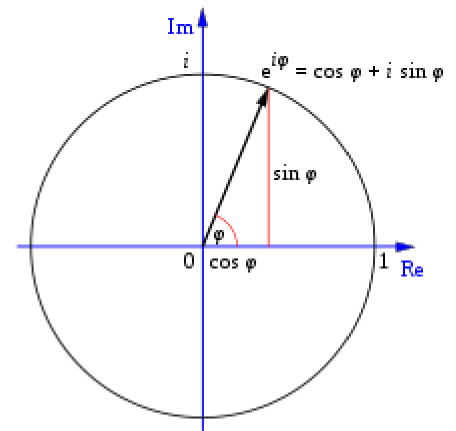
Bilangan dan analisis kompleks

Bilangan kompleks apapun, sebut saja z, dapat dinyatakan menggunakan pasangan bilangan nyata. Dalam sistem koordinat polar, satu bilangan (jari-jari atau r) digunakan untuk menyatakan jarak z dari pusat bidang kompleks sedangkan (sudut atau φ) menyatakan a putaran berlawanan arah jarum jam dari garis nyata

positif sebagai berikut:[121]

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dengan i adalah satuan imajiner dari $i^2 = -1$. Setingnya penggunaan π dalam analisis kompleks dapat dihubungkan dengan perilaku fungsi eksponential variabel kompleks, yang dijelaskan oleh formula Euler:[122]



Asosiasi antara daya imajiner dengan bilangan *e* dan titik-titik pada satuan lingkaran yang berpusat pada pusat bidang kompleks dinyatakan oleh formula Euler.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

dengan tetapan e adalah basis logaritma natural. Formula ini menghasilkan hubungan antara daya imajiner e dan titik-titik pada satuan lingkaran yang berpusat pada pusat bidang kompleks. Pengaturan $\varphi = \pi$ dalam formula Euler menghasilkan identitas Euler, disambut gembira oleh para matematikawan karena mengandung lima tetapan matematika paling penting:[122][123]

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

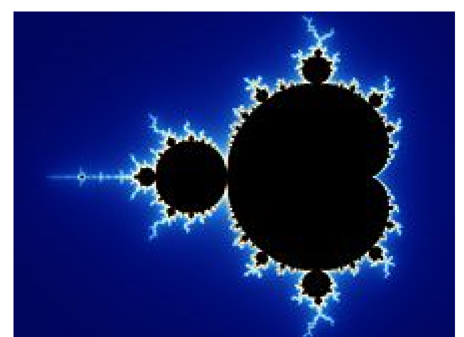
Sebanyak n bilangan kompleks z yang berbeda dalam persamaan $z^n = 1$, disebut "akar persatuan (*root of unity*) ke n".[124] Mereka dinyatakan dalam persamaan:

$$e^{2\pi ik/n} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Formula integral Cauchy mengelola fungsi integral kompleks dan menghasilkan hubungan penting antara integrasi dan diferensiasi, termasuk kenyataan bahwa nilai fungsi kompleks dalam suatu batas tertutup seluruhnya ditentukan oleh nilai pada batasan:[125][126]

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Keberadaan π dalam fraktal himpunan Mandelbrot ditemukan oleh warga negara Amerika David Boll pada tahun 1991.[127] Dia mempelajari perilaku humpunan Mandelbrot dekat "leher" pada (-0,75, 0). Jika dianggap titik dengan koordinat (-0,75, ε), dengan ε cenderung nol, jumlah iterasi sampai perbedaan untuk jalur dikalikan dengan ε konvergen menuju π. Titik (0,25, ε) di titik puncak "lembah" besar di sisi kanan himpunan Mandelbrot berperilaku sama: jumlah iterasi sampai divergensi dikalikan dengan akar kuadrat ε cenderung mendekati π.[127][128]



π dapat dihitung dari himpunan Mandelbrot, dengan menghitung jumlah iterasi yang diperlukan sebelum titik divergen (-0,75, ε).

Fungsi gama memperluas konsep faktorial (biasanya didefinisikan hanya untuk bilangan bulat non-negatif) ke semua bilangan kompleks, kecuali bilangan bulat nyata negatif. Ketika fungsi gama dievaluasi untuk bilangan setengah bulat, hasilnya berisi π; sebagai contoh

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

dan

$$\Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$ [129]

Fungsi gama dapat digunakan untuk membuat pendekatan sederhana seperti $n!$ untuk n besar:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

yang dikenal sebagai aproksimasi Stirling.[130]

Teori bilangan dan fungsi zeta Riemann

Fungsi zeta Riemann $\zeta(s)$ digunakan dalam banyak bidang matematika. Ketika dievaluasi pada $s = 2$ fungsi ini dapat ditulis sebagai:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Menemukan penyelesaian sederhana untuk deret tak hingga ini merupakan masalah populer dalam matematika yang disebut masalah Basel. Leonhard Euler memecahkannya pada tahun 1735 ketika ia menunjukkan bahwa itu sama dengan $\pi^2/6$.[74] Hasil Euler mengarah pada teori bilangan yaitu probabilitas dua angka acak yang bersifat prima relatif (tidak memiliki faktor bersama) adalah sama dengan $6/\pi^2$.[131][n 14] Probabilitas ini berdasarkan pengamatan bahwa probabilitas bilangan sembarang dapat dibagi dengan suatu bilangan prima p adalah $1/p$ (sebagai contoh, setiap bilangan bulat ke-7 dapat dibagi dengan 7.) Sehingga probabilitas dua bilangan yang keduanya dapat dibagi dengan bilangan prima ini adalah $1/p^2$, dan probabilitas bahwa sekurang-kurangnya satu di antaranya tidak dapat dibagi adalah $1-1/p^2$. Untuk bilangan prima yang berbeda, kasus dapat dibagi ini bersifat independen; sehingga probabilitas bahwa dua bilangan adalah prima relatif diberikan oleh hasil pembagian seluruh bilangan prima:[132]

$$\prod_p^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(\prod_p^{\infty}\frac{1}{1-p^{-2}}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 61\%$$

Probabilitas ini dapat digunakan bersamaan dengan generator bilangan acak untuk memperkirakan π menggunakan pendekatan Monte Carlo.[133]

Probabilitas dan statistik

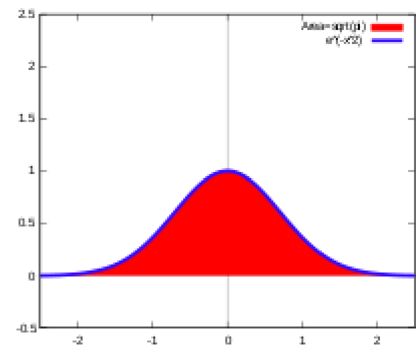
Bidang probabilitas dan statistik sering kali menggunakan distribusi normal sebagai model sederhana untuk fenomena kompleks; sebagai contoh, ilmuwan umumnya berasumsi bahwa kesalahan pengamatan dalam kebanyakan percobaan mengikuti sebuah distribusi normal.[134] Fungsi Gauss (yang merupakan fungsi kepekatan probabilitas distribusi normal) dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ, pada dasarnya adalah π:[135]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Agar ini dapat menjadi kepekatan probabilitas, wilayah di bawah grafik f harus sama dengan satu. Hal ini diperoleh dari perubahan variabel dalam integral Gauss:[135]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

sehingga luas daerah yang berada di bawah kurva lonceng sederhana sama dengan akar kuadrat π.



Sebuah grafik fungsi Gauss $f(x) = e^{-x^2}$. Wilayah berwarna di antara fungsi dan sumbu x memiliki luas $\sqrt{\pi}$.

Rumus dengan π

Bentuk	Rumus
Keliling lingkaran dengan jari-jari *r* dan diameter *d*	$K = \pi d = 2\pi r$
Luas lingkaran dengan jari-jari *r* dan diameter *d*	$L = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$
Volume bola dengan jari-jari *r* atau diameter *d*	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ atau $V = \frac{1}{6}\pi d^3$
Luas permukaan bola dengan jari-jari *r* atau diameter *d*	$L = 4\pi r^2$ atau $L = \pi d^2$
Volume silinder setinggi *h* dan berjari-jari *r*	$V = \pi r^2 h$
Luas permukaan silinder setinggi *h* dan berjari-jari *r*	$L = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h = 2\pi r(r + h)$
Volume kerucut setinggi *h* dan berjari-jari *r*	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Luas permukaan kerucut setinggi *h* dan berjari-jari *r*	$L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2 = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2})$

Di luar matematika

Penggambaran fenomena fisika

Meskipun bukan konstanta fisika, π hadir secara rutin dalam persamaan-persamaan yang menjelaskan prinsip-prinsip fundamental alam semesta, sering karena hubungan antara π dengan lingkaran dan dengan sistem koordinat sferis. Rumus sederhana dari bidang mekanika klasik memberikan aproksimasi periode T pendulum sederhana dengan panjang L, yang mengayun dengan amplitudo g adalah percepatan gravitasi bumi):[136]

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Salah satu rumus kunci dalam mekanika kuantum adalah Prinsip ketidakpastian Heisenberg, yang menunjukkan bahwa ketidakpastian dalan pengukuran posisi suatu partikel (Δx) dan momentum (Δp) keduanya tidak dapat sama persis pada saat yang bersamaan (dengan h adalah tetapan Planck):[137]

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Dalam ranah kosmologi, π muncul dalam persamaan medan Einstein, suatu formula fundamental yang menjadi dasar teori relativitas umum dan menjelaskan interaksi fundamental gravitasi sebagai hasil pelengkungan ruang waktu oleh materi dan energi:[138][139]

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

dengan $R_{\mu\nu}$ adalah tensor lengkungan Ricci, R adalah lengkungan skalar, $g_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik, Λ adalah tetapan kosmologi, G adalah tetapan gravitasi Newton, c adalah kecepatan cahaya dalam ruang hampa, dan $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi tegangan.

Hukum Coulomb, dari disiplin ilmu elektromagnetisme, menjelaskan medan listrik antara dua muatan listrik (q_1 dan q_2) yang dipisahkan oleh jarak r (dengan ε_0 mewakili permitivitas ruang hampa:[140]

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Fakta bahwa nilai π mendekati 3 memainkan peran dalam ortopositronium dalam waktu yang relatif panjang. Kebalikannya hingga orde paling rendah dalam tetapan struktur halus α adalah[141]

$$\frac{1}{\tau} = 2\frac{\pi^2 - 9}{9\pi}m\alpha^6,$$

dengan m adalah massa elektron.

π hadir dalam beberapa formula rekayasa struktur, seperti rumus buckling yang diturunkan oleh Euler, yang memberikan muatan aksial F maksimum dengan panjang kolom L, elastisitas modulus E, dan momen inersia area I dapat mengangkut tanpa *buckling*:[142]

$$F = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Bidang dinamika fluida menyertakan π dalam hukum Stokes, yang mengaproksimasi gaya friksi F yang muncul pada objek sferis kecil dengan radius R, bergerak dengan kecepatan v dalam fluida yang mempunyai viskositas dinamis η:[143]

$$F = 6\,\pi\,\eta\,R\,v$$

Transformasi Fourier, dijelaskan di bawah, adalah operasi matematika yang menyatakan waktu sebagai fungsi dari frekuensi, dikenal karena spektrum frekuensinya. Ini mempunyai banyak aplikasi dalam fisika dan rekayasa, terutama dalam pemrosesan sinyal.[144]

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

Mengingat digit

Artikel utama: Pifilologi

Banyak orang telah mengingat sejumlah besar digit angka π, suatu praktik yang disebut pifilologi.[145] Satu teknik umum untuk mengingat adalah melalui cerita atau puisi yang mana panjang kata-kata mewakili angka digit π: Kata pertama terdiri dari tiga huruf, kata kedua memiliki satu huruf, kata ketiga empat huruf, kata keempat satu huruf, kata kelima lima huruf, dan seterusnya. Contoh awal cara mengingat, diprakarsai oleh ilmuwan Inggris James Jeans, adalah *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics*.[145] Ketika sebuah puisi (*poem*) digunakan, itu terkadang dirujuk sebagai *piem*. Puisi untuk mengingat π telah digubah dalam beberapa bahasa selain bahasa Inggris.[145]

Rekor mengingat digit π, yang dicatat oleh *Guinness World Records*, adalah 70.000 digit, dibacakan di India oleh Rajveer Meena selama 9 jam 27 menit pada tanggal 21 Maret 2015.[146] Pada tahun 2006, Akira Haraguchi, seorang pensiunan insinyur Jepang, mengklaim telah membacakan 100.000 desimal π, tetapi klaim tersebut tidak diverifikasi oleh *Guinness World Records*.[147] Peraturan rekor pengingat π biasanya tidak berdasarkan puisi, tetapi malahan menggunakan metode semacam mengingat pola angka dan metode loci.[148]

Beberapa penulis telah menggunakan digit π sebagai dasar bentuk baru tulisan terbatas (bahasa Inggris: *constrained writing*), di mana diperlukan panjang kata yang mereprentasikan digit π. *Cadaeic Cadenza* mengandung 3.835 digit pertama π,[149] dan satu buku penuh berjudul *Not a Wake* mengandung 10.000 kata, yang masing-masing mereprentasikan satu digit π.[150]

Lihat pula

- Deret (matematika)
- Urutan

Referensi

Referensi

1. ^ a b c "Round 2... 10 Trillion Digits of Pi" (http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html), NumberWorld.org, 17 Oct 2011. Retrieved 30 May 2012.
2. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 17
3. ^ Bailey, David; Borwein, Jonathan; Borwein, Peter; Plouffe, Simon (1997). "The Quest for Pi". *The Mathematical Intelligencer*. **19** (1): 50–56. CiteSeerX 10.1.1.138.7085. doi:10.1007/bf03024340.
4. ^ Holton, David; Mackridge, Peter (2004). "Greek: an Essential Grammar of the Modern Language". Routledge. ISBN 0-415-23210-4., p. xi.
5. ^ a b c Arndt & Haenel 2006, hlm. 8
6. ^ Rudin, Walter (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill. ISBN 0-07-054235-X., p 183.
7. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 5
8. ^ Salikhov, V. (2008). "On the Irrationality Measure of pi". *Russian Mathematical Survey*. **53** (3): 570.

Bibcode:2008RuMaS..63..570S. doi:10.1070/RM2008v063n03ABEH004543.

9. ^ Mayer, Steve. "The Transcendence of π". Diakses tanggal 4 November 2007.
10. ^ Posamentier & Lehmann 2004, hlm. 25
11. ^ Eymard & Lafon 1999, hlm. 129
12. ^ Beckmann 1989, hlm. 37
13. ^ Schlager, Neil; Lauer, Josh (2001). *Science and Its Times: Understanding the Social Significance of Scientific Discovery*. Gale Group. ISBN 0-7876-3933-8., p 185.
14. ^ [a] [b] Arndt & Haenel 2006, hlm. 22–23 Preuss, Paul (23 July 2001). "Are The Digits of Pi Random? Lab Researcher May Hold The Key". Lawrence Berkeley National Laboratory. Diakses tanggal 10 November 2007.
15. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 22, 28–30
16. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 3
17. ^ "Sloane's A001203 : Continued fraction for Pi (http://oeis.org/A001203)", *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. OEIS Foundation. Retrieved 12 April 2012.
18. ^ Lange, L. J. (1999). "An Elegant Continued Fraction for π". *The American Mathematical Monthly*. **106** (5): 456–458. doi:10.2307/2589152. JSTOR 2589152.
19. ^ **Kesalahan pengutipan: Tag `<ref>` tidak sah; tidak ditemukan teks untuk ref bernama `Eymard 1999 78`**
20. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 240
21. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 242
22. ^ Kennedy, E. S., "Abu-r-Raihan al-Biruni, 973-1048", *Journal for the History of Astronomy*, **9**: 65, Bibcode:1978JHA.....9...65K, doi:10.1177/002182867800900106.
23. ^ Verner, M. (2003). "The Pyramids: Their Archaeology and History"., p. 70.
24. ^ Petrie (1940). "Wisdom of the Egyptians"., p. 30.
25. ^ Legon, J. A. R. (1991). "On Pyramid Dimensions and Proportions". *Discussions in Egyptology*. **20**: 25–34..
26. ^ Petrie, W. M. F. (1925). "Surveys of the Great Pyramids". *Nature Journal*. **116** (2930): 942–942. Bibcode:1925Natur.116..942P. doi:10.1038/116942a0.
27. ^ Egyptologist: Rossi, Corinna, *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge University Press, 2004, pp 60–70, 200, ISBN 978-0-521-82954-0.
28. ^ Skeptics: Shermer, Michael, *The Skeptic Encyclopedia of Pseudoscience*, ABC-CLIO, 2002, pp 407–408, ISBN 978-1-57607-653-8.
29. ^ Fagan, Garrett G., *Archaeological Fantasies: How Pseudoarchaeology Misrepresents The Past and Misleads the Public*, Routledge, 2006, ISBN 978-0-415-30593-8.
30. ^ [a] [b] Arndt & Haenel 2006, hlm. 167
31. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 168–169
32. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 169
33. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 169, Schepler 1950, hlm. 165
34. ^ Beckmann 1989, hlm. 14–16.
35. ^ James A. Arieti, Patrick A. Wilson (2003). *The Scientific & the Divine*. Rowman & Littlefield. hlm. 9–10. ISBN 9780742513976. Diakses tanggal 2013-06-05.
36. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 170
37. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 175, 205
38. ^ "The Computation of Pi by Archimedes: The Computation of Pi by Archimedes – File Exchange – MATLAB Central". Mathworks.com. Diakses tanggal 2013-03-12.
39. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 171
40. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 176
41. ^ Boyer & Merzbach 1991, hlm. 168
42. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 15–16, 175, 184–186, 205.
43. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 176–177
44. ^ [a] [b] Boyer & Merzbach 1991, hlm. 202
45. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 177
46. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 178
47. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 179
48. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 180
49. ^ Azarian, Mohammad K. (2010). [[1] (http://nirmala.home.xs4all.nl/Azarian2.pdf) "al-Risāla al-muhītīyya: A Summary"] Periksa nilai `|url=` (bantuan) (PDF). *Missouri Journal of Mathematical Sciences*. **22** (2): 64–85.
50. ^ O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (1999). "Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi". *MacTutor History of Mathematics archive*. Diakses tanggal Augustus 11, 2012.

51. ^ a b c Arndt & Haenel 2006, hlm. 182
52. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 182–183
53. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 183
54. ^ Grienbergerus, Christophorus (1630). *Elementa Trigonometrica[[Kategori:Artikel mengandung aksara Latin]]* (PDF) (dalam bahasa Latin). Konflik URL–wikilink (bantuan)
55. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 185–191
56. ^ a b c d Roy 1990, hlm. 101–102
57. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 185–186
58. ^ Joseph 1991, hlm. 264
59. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 188. Newton quoted by Arndt.
60. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 187
61. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 188–189
62. ^ a b Eymard & Lafon 1999, hlm. 53–54
63. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 189
64. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 156
65. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 192–193
66. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 72–74
67. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 192–196, 205
68. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 194–196
69. ^ a b Borwein, J. M.; Borwein, P. B. (1988). "Ramanujan and Pi". *Scientific American*. **256** (2): 112–117. Bibcode:1988SciAm.258b.112B. doi:10.1038/scientificamerican0288-112. Arndt & Haenel 2006, hlm. 15–17, 70–72, 104, 156, 192–197, 201–202
70. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 69–72
71. ^ Borwein, J. M.; Borwein, P. B.; Dilcher, K. (1989). "Pi, Euler Numbers, and Asymptotic Expansions". *American Mathematical Monthly*. **96** (8): 681–687. doi:10.2307/2324715.
72. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 223
73. ^ Wells, David (1997). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (edisi ke-revised). Penguin. hlm. 35. ISBN 978-0-140-26149-3.
74. ^ a b Posamentier & Lehmann 2004, hlm. 284
75. ^ Lambert, Johann, "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques", reprinted in Berggren, Borwein & Borwein 1997, hlm. 129–140
76. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 196
77. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 165.
78. ^ a b c d e Arndt & Haenel 2006, hlm. 166
79. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 205
80. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 197. See also Reitwiesner 1950.
81. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 197
82. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 15–17
83. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 131
84. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 132, 140
85. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 87
86. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 111 (5 times); pp. 113–114 (4 times).
87. ^ a b c Bailey, David H. (16 May 2003). "Some Background on Kanada's Recent Pi Calculation" (PDF). Diakses tanggal 12 April 2012.
88. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 17. "39 digit π cukup untuk menghitung volume alam semesta sampai dengan taraf atom." Dengan mempertimbangkan digit tambahan yang diperlukan untuk mengkompensasikan pembulatan, Arndt menyimpulkan bahwa beberapa ratus digit sudah mencukupi untuk perhitungan-perhitungan ilmiah apapun.
89. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 17–19
90. ^ Schudel, Matt (25 March 2009). "John W. Wrench, Jr.: Mathematician Had a Taste for Pi". *The Washington Post*. hlm. B5.
91. ^ "The Big Question: How close have we come to knowing the precise value of pi?". *The Independent*. 8 January 2010. Diakses tanggal 14 April 2012.
92. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 18
93. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 103–104
94. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 104
95. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 104, 206
96. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 110–111
97. ^ Eymard & Lafon 1999, hlm. 254
98. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 110–111, 206
99. ^ Bellard, Fabrice, "Computation of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer" (http://bellard.org/pi/pi2700e9/pipcrecord.pdf), 11 Feb 2010.
100. ^ Plouffe, Simon (April 2006). "Identities inspired by Ramanujan's Notebooks (part 2)" (PDF). Diakses tanggal 10 April 2009.
101. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 77–84

102. ^ a b Gibbons, Jeremy, "Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi" (http://www.cs.ox.ac.uk/jeremy.gibbons/publications/spigot.pdf), 2005. Gibbons produced an improved version of Wagon's algorithm.
103. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 77
104. ^ Rabinowitz, Stanley; Wagon, Stan (1995). "A spigot algorithm for the digits of Pi". *American Mathematical Monthly*. **102** (3): 195–203. doi:10.2307/2975006.
105. ^ a b Arndt & Haenel 2006, hlm. 117, 126–128
106. ^ Bailey, David H.; Borwein, Peter B.; and Plouffe, Simon (1997). "On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants" (PDF). *Mathematics of Computation*. **66** (218): 903–913. doi:10.1090/S0025-5718-97-00856-9.
107. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 128.
108. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 20
109. ^ Bellards formula in: Bellard, Fabrice. "A new formula to compute the nth binary digit of pi". Diarsipkan dari versi asli tanggal 12 September 2007. Diakses tanggal 27 October 2007.
110. ^ Palmer, Jason (16 September 2010). "Pi record smashed as team finds two-quadrillionth digit". *BBC News*. Diakses tanggal 26 March 2011.
111. ^ Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 200, 209
112. ^ **(Inggris)** Eric W. Weisstein, *{{{title}}}* di MathWorld.
113. ^ a b Ayers 1964, hlm. 60
114. ^ a b Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 210–211
115. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 39
116. ^ Ramaley, J. F. (October 1969). "Buffon's Noodle Problem". *The American Mathematical Monthly*. **76** (8): 916–918. doi:10.2307/2317945. JSTOR 2317945.
117. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 39–40
118. ^ Posamentier & Lehmann 2004, hlm. 105
119. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 43
120. ^ Posamentier & Lehmann 2004, hlm. 105–108
121. ^ Ayers 1964, hlm. 100
122. ^ a b Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 592
123. ^ Maor, Eli (2009), *E: The Story of a Number*, Princeton University Press, hlm. 160, ISBN 978-0-691-14134-3 ("lima tetapan terpenting").
124. ^ **(Inggris)** Eric W. Weisstein, *{{{title}}}* di MathWorld.
125. ^ **(Inggris)** Eric W. Weisstein, *{{{title}}}* di MathWorld.
126. ^ Joglekar, S.D. (2005), *Mathematical Physics*, Universities Press, hlm. 166, ISBN 978-81-7371-422-1.
127. ^ a b Klebanoff, Aaron (2001). "Pi in the Mandelbrot set". *Fractals*. **9** (4): 393–402. doi:10.1142/S0218348X01000828. Diarsipkan dari versi asli (PDF) tanggal 2012-04-06. Diakses tanggal 14 April 2012.
128. ^ Peitgen, Heinz-Otto, *Chaos and fractals: new frontiers of science*, Springer, 2004, pp. 801–803, ISBN 978-0-387-20229-7.
129. ^ Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 191–192
130. ^ Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 190
131. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 41–43
132. ^ Ogilvy, C. S.; Anderson, J. T., *Excursions in Number Theory*, Dover Publications Inc., 1988, pp. 29–35, ISBN 0-486-25778-9.
133. ^ Arndt & Haenel 2006, hlm. 43
134. ^ Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1*, Wiley, 1968, hlm. 174–190.
135. ^ a b Bronshteĭn & Semendiaev 1971, hlm. 106–107, 744, 748
136. ^ Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl (1997), *Fundamentals of Physics* (edisi ke-5th), John Wiley & Sons, hlm. 381, ISBN 0-471-14854-7
137. ^ Imamura, James M (17 August 2005). "Heisenberg Uncertainty Principle". University of Oregon. Diarsipkan dari versi asli tanggal 12 October 2007. Diakses tanggal 9 September 2007.
138. ^ Yeo, Adrian (2006), *The pleasures of pi, e and other interesting numbers*, World Scientific Pub, hlm. 21, ISBN 978-981-270-078-0.
139. ^ Ehlers, Jürgen (2000), *Einstein's Field Equations and Their Physical Implications*, Springer, hlm. 7, ISBN 978-3-540-67073-5.
140. ^ Nave, C. Rod (28 June 2005). "Coulomb's Constant". *HyperPhysics*. Georgia State

University. Diakses tanggal 9 November 2007.

141. ^ Itzykson, C.; Zuber, J-B. (1980), *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill.
142. ^ Low, Peter (1971), *Classical Theory of Structures Based on the Differential Equation*, CUP Archive, hlm. 116–118, ISBN 978-0-521-08089-7.
143. ^ Batchelor, G.K. (1967), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, hlm. 233, ISBN 0-521-66396-2.
144. ^ Bracewell, R.N. (2000), *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-116043-4.
145. ^ a b c Arndt & Haenel 2006, hlm. 44–45
146. ^ "Most Pi Places Memorized" (http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/most-pi-places-memorised), Guinness World Records.
147. ^ Otake, Tomoko (17 Desember 2006). "How can anyone remember 100,000 numbers?". *The Japan Times*. Diakses tanggal 27 Oktober 2007.
148. ^ Raz, A.; Packard, M. G. (2009). "A slice of pi: An exploratory neuroimaging study of digit encoding and retrieval in a superior memorist". *Neurocase*. **15**: 361–372. doi:10.1080/13554790902776896. PMID 19585350.
149. ^ Keith, Mike. "Cadaeic Cadenza Notes & Commentary". Diakses tanggal 29 July 2009.
150. ^ Keith, Michael; Diana Keith (February 17, 2010). *Not A Wake: A dream embodying (pi)'s digits fully for 10000 decimals*. Vinculum Press. ISBN 978-0963009715.

Catatan kaki

1. ^ Ptolemaeus menggunakan pendekatan tiga-digit-seksagesimal, dan Jamshīd al-Kāshī mengembangkan pendekatan ini hingga sembilan digit; lihat Aaboe, Asger (1964), *Episodes from the Early History of Mathematics*, New Mathematical Library, **13**, New York: Random House, hlm. 125.
2. ^ "Kita dapat menyimpulkan bahwa meskipun bangsa Mesir kuno tidak dapat mendefinisikan nilai π dengan tepat, dalam praktiknya mereka menggunakannya".
3. ^ Untuk sederetan penjelasan mengenai bentuk piramida yang tak melibatkan π, lihat Roger Herz-Fischler (2000). *The Shape of the Great Pyramid*. Wilfrid Laurier University Press. hlm. 67–77, 165–166. ISBN 9780889203242. Diakses tanggal 2013-06-05.
4. ^ Ayat tersebut adalah 1 Kings:7:23-NKJV (http://alkitab.sabda.org/bible.php?lang=id&version=tb&book=1&chapter=Kings#7:23) dan 2 Chronicles:4:2-NKJV (http://alkitab.sabda.org/bible.php?lang=id&version=tb&book=2&chapter=Chronicles#4:2)
5. ^ Gagasan bahwa kolam ini berbentuk heksagonal telah diberikan sebagai penjelasan terhadap disparitas ini. Lihat Borwein, Jonathan M.; Bailey, David H. (2008). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st century* (edisi ke-revised 2nd). A. K. Peters. ISBN 978-1-56881-442-1., pp. 103, 136, 137.
6. ^ Grienberger mencapai 39 digit pada tahun 1630; Sharp 71 digit pada tahun 1699.
7. ^ Nilai evaluasinya sebesar $3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 4196 < \pi < 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 4199$.
8. ^ (formula 16.10). Perhatikan bahwa $(n - 1)n(n + 1) = n^3 - n$.
9. ^ Dalam Schepler 1950, hlm. 220: William Oughtred menggunakan huruf π untuk mewakili keliling suatu lingkaran.
10. ^ Borwein & Borwein 1987 untuk detail algoritme.
11. ^ PSLQ singkatan dari *Partial Sum of Least Squares*.
12. ^ Sebuah program komputer juga telah diciptakan untuk mengimplementasikan algoritme keran Wagon tersebut hanya dalam perangkat lunak berjumlah karakter 120.

13. ^ Plouffe sebenarnya juga menemukan algoritme ektraksi digit desimal, namun algoritme ini lebih lambat daripada komputasi langsung semua digit-digit π.
14. ^ Teorema ini dibuktikan oleh Ernesto Cesàro pada tahun 1881. Untuk lebih jelasnya, lihat Hardy, G. H., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 2008, ISBN 978-0-19-921986-5, teorema 332.

Daftar pustaka

- Arndt, Jörg; Haenel, Christoph (2006). *Pi Unleashed*. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-66572-4. Diakses tanggal 2013-06-05. English translation by Catriona and David Lischka.
- Ayers, Frank (1964). *Calculus*. McGraw-Hill. ISBN 978-0-070-02653-7.
- Berggren, Lennart; Borwein, Jonathan; Borwein, Peter (1997). *Pi: a Source Book*. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-20571-7.
- Beckmann, Peter (1989) [1974]. *History of Pi*. St. Martin's Press. ISBN 978-0-88029-418-8.
- Borwein, Jonathan; Borwein, Peter (1987). *Pi and the AGM: a Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. Wiley. ISBN 978-0-471-31515-5.
- Boyer, Carl B.; Merzbach, Uta C. (1991). *A History of Mathematics* (edisi ke-2). Wiley. ISBN 978-0-471-54397-8.
- Bronshteĭn, Ilia; Semendiaev, K. A. (1971). *A Guide Book to Mathematics*. H. Deutsch. ISBN 978-3-871-44095-3.
- Eymard, Pierre; Lafon, Jean Pierre (1999). *The Number Pi*. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-3246-2., English translation by Stephen Wilson.
- Joseph, George Gheverghese (1991). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13526-7. Diakses tanggal 2013-06-05.
- Posamentier, Alfred S.; Lehmann, Ingmar (2004). *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books. ISBN 978-1-59102-200-8.
- Reitwiesner, George (1950). "An ENIAC Determination of pi and e to 2000 Decimal Places". *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*. **4** (29): 11–15. doi:10.2307/2002695.
- Roy, Ranjan (1990). "The Discovery of the Series Formula for pi by Leibniz, Gregory, and Nilakantha". *Mathematics Magazine*. **63** (5): 291–306. doi:10.2307/2690896.
- Schepler, H. C. (1950). "The Chronology of Pi". *Mathematics Magazine*. Mathematical Association of America. **23** (3): 165–170 (Jan/Feb), 216–228 (Mar/Apr), and 279–283 (May/Jun). doi:10.2307/3029284.. issue 3 Jan/Feb (http://www.jstor.org/discover/10.2307/3029284), issue 4 Mar/Apr (http://www.jstor.org/stable/3029832), issue 5 May/Jun (http://www.jstor.org/stable/3029000)

Pranala luar

- Program dalam Pascal tentang pemakaian π (http://sia.akprind.ac.id/jack/geometri.pas.txt)
- Sejarah singkat tentang π (http://www.exploratorium.edu/pi/history_of_pi/index.html)
- Pi-memory (http://pidifferent.pi.funpic.de/index-en.html)